3章　関数とグラフ

問1

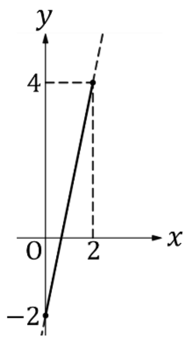
$f(-1) = 2 \cdot (-1) + 3$
$= -2 + 3 = \mathbf{1}$

$f(-a) = 2 \cdot (-a) + 3$
$= \boldsymbol{-2a + 3}$

$f(a+1) = 2 \cdot (a+1) + 3$
$= 2a + 2 + 3$
$= \boldsymbol{2a + 5}$

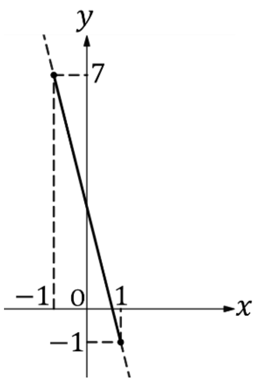
問2

（1）$x = 0$のとき，$y = -2$
$x = 2$のとき，$y = 4$



$\boldsymbol{-2 \leqq y \leqq 4}$

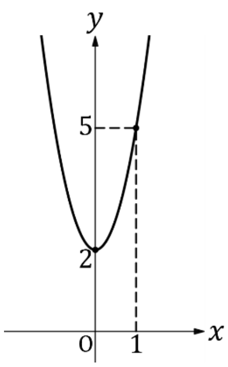
（2）$x = -1$のとき，$y = 7$
$x = 1$のとき，$y = -1$



$\boldsymbol{-1 \leqq y \leqq 7}$

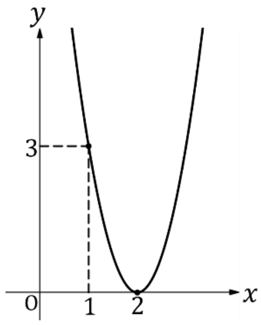
問3

（1）この関数のグラフは，$y = 3x^2$のグラフを
y軸方向に2平行移動したものである．



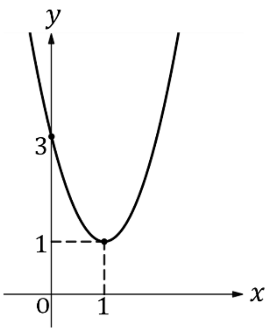
軸　$\boldsymbol{x = 0}$
頂点　$(\mathbf{0},\ \mathbf{2})$

（2）この関数のグラフは，$y = 3x^2$のグラフを
x軸方向に2平行移動したものである．



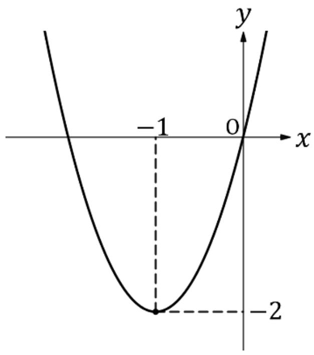
軸　$\boldsymbol{x = 2}$
頂点　$(\mathbf{2},\ \mathbf{0})$

（3）この関数のグラフは，$y = 2x^2$のグラフを
x軸方向に1，y軸方向に1平行移動したものである．



軸　$\boldsymbol{x = 1}$
頂点　$(\mathbf{1},\ \mathbf{1})$

（4）この関数のグラフは，$y = 2x^2$のグラフを
x軸方向に-1，y軸方向に-2平行移動したものである．



軸　$\boldsymbol{x = -1}$
頂点　$(\mathbf{-1},\ \mathbf{-2})$

問4

求める放物線の方程式は
$y - 1 = -3\{x - (-2)\}^2$
すなわち，$\boldsymbol{y = -3(x+2)^2 + 1}$

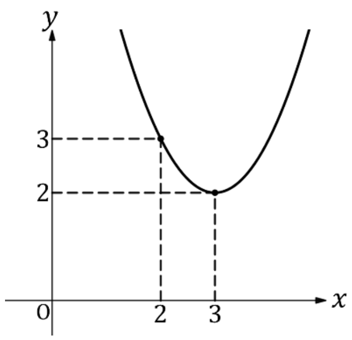
問5

（1）$y = (x-3)^2 - 9 + 11$
$= (x-3)^2 + 2$
よって，標準形は，$\boldsymbol{y = (x-3)^2 + 2}$
この関数のグラフは，$y = x^2$のグラフを

x軸方向に3，y軸方向に2平行移動したものである．

軸　$\boldsymbol{x=3}$

頂点　$\boldsymbol{(3,\ 2)}$



（２）$y=2(x^2+2x)+1$

$=2\{(x+1)^2-1\}+1$

$=2(x+1)^2-2+1$

$=2(x+1)^2-1$

よって，標準形は，$\boldsymbol{y=2(x+1)^2-1}$

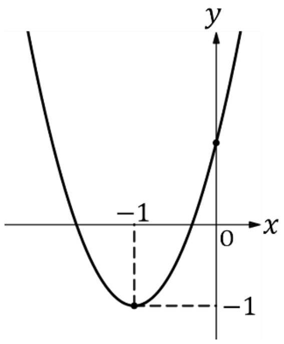
この関数のグラフは，$y=2x^2$のグラフを

x軸方向に-1，y軸方向に-1平行移動したもの

である．

軸　$\boldsymbol{x=-1}$

頂点　$\boldsymbol{(-1,\ -1)}$



（３）$y=2(x^2+x)$

$=2\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}$

$=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

よって，標準形は，$\boldsymbol{y=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}}$

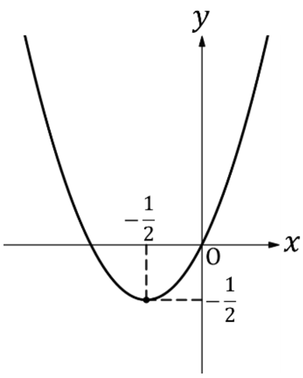
この関数のグラフは，$y=2x^2$のグラフを

x軸方向に$-\frac{1}{2}$，y軸方向に$-\frac{1}{2}$平行移動したもの

である．

軸　$\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}}$

頂点　$\boldsymbol{\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)}$



（４）$y=-4\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)-1$

$=-4\left\{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right\}-1$

$=-4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{4}-1$

$=-4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{5}{4}$

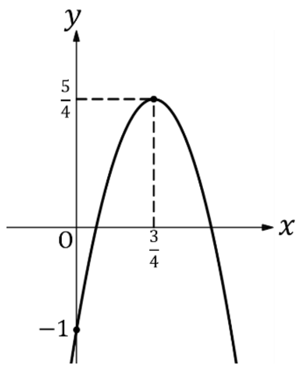
よって，標準形は，$\boldsymbol{y=-4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{5}{4}}$

この関数のグラフは，$y=-4x^2$のグラフを

x軸方向に$\frac{3}{4}$，y軸方向に$\frac{5}{4}$平行移動したものである．

軸　$\boldsymbol{x=\frac{3}{4}}$

頂点　$\boldsymbol{\left(\frac{3}{4},\ \frac{5}{4}\right)}$



問６

（１）頂点の座標が$(-1,\ 3)$であるから，求める放物線の

標準形は，$y=a(x+1)^2+3$となる．

この放物線が，原点$(0,\ 0)$を通るから

$0=a(0+1)^2+3$

$0=a+3$

よって，$a=-3$

したがって，求める放物線の標準形は

$\boldsymbol{y=-3(x+1)^2+3}$

（２）頂点がy軸上にあるので，求める放物線の方程式は

$y=ax^2+b$となる．

この放物線が，２点$(1,\ 2)$，$(2,\ -7)$を通るから

$$\begin{cases} 2=a\cdot 1^2+b \\ -7=a\cdot 2^2+b \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 4a+b=-7 \end{cases}$$

これを解いて，$a=-3$，$b=5$

したがって，求める放物線の方程式は

$\boldsymbol{y=-3x^2+5}$

問 7

求める放物線の方程式を$y=ax^2+b+c$とおく.
この放物線が，3 点$(-1,\ 0)$，$(0,\ 3)$，$(1,\ 4)$を
通るから，それぞれ代入して

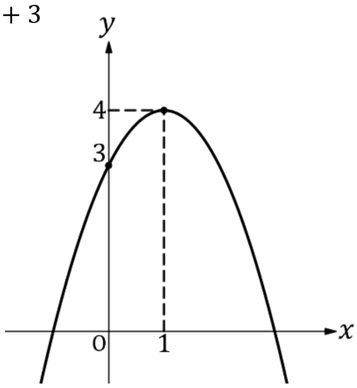
$$\begin{cases}0=a-b+c\\3=c\\4=a+b+c\end{cases}$$

これを解いて，$a=-1$，$b=2$，$c=3$
したがって，求める放物線の方程式は

$\boldsymbol{y=-x^2+2x+3}$

標準形に変形すると

$$\begin{aligned}y&=-(x^2-2x)+3\\&=-\{(x-1)^2-1\}+3\\&=-(x-1)^2+1+3\\&=-(x-1)^2+4\end{aligned}$$



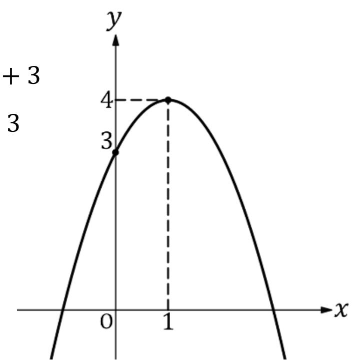
軸　$\boldsymbol{x=1}$

頂点　(1，4)

問 8

（１）標準形に変形すると

$$\begin{aligned}y&=-(x^2-2x)+3\\&=-\{(x-1)^2-1\}+3\\&=-(x-1)^2+1+3\\&=-(x-1)^2+4\end{aligned}$$



よって

最大値　4（$\boldsymbol{x=1}$のとき）

最小値　なし

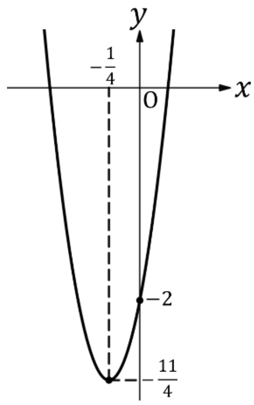
（２）標準形に変形すると

$$y=12\left(x^2+\frac{1}{2}\right)-2$$

$$=12\left\{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right\}-2$$

$$=12\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{3}{4}-2$$

$$=12\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{11}{4}$$



よって

最大値　なし

最小値　$\boldsymbol{-\frac{11}{4}}$　$\left(\boldsymbol{x=-\frac{1}{4}}\text{のとき}\right)$

問 9

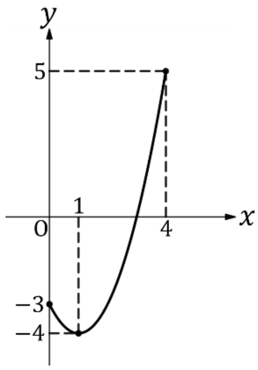
（１）標準形に変形すると

$$\begin{aligned}y&=(x-1)^2-1-3\\&=(x-1)^2-4\end{aligned}$$

また

$x=0$のとき，$y=-3$

$x-4$のとき，$y=5$



よって

最大値　5（$\boldsymbol{x=4}$のとき）

最小値　−4（$\boldsymbol{x=1}$のとき）

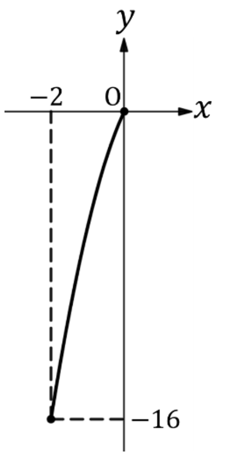
（２）標準形に変形すると

$$\begin{aligned}y&=-2(x^2-2x)\\&=-2\{(x-1)^2-1\}\\&=-2(x-1)^2+2\end{aligned}$$

また

$x=-2$のとき，$y=-16$

$x=0$のとき，$y=0$



よって

最大値　0（$\boldsymbol{x=0}$のとき）

最小値　−16（$\boldsymbol{x=-2}$のとき）

問 10

横の長さは

$$\frac{12-2x}{2}=6-x$$

$x>0$，$6-x>0$より，定義域は，$0<x<6$

長方形の面積をSとすると

$S=x(6-x)$

$=-x^2+6x$

$=-(x^2-6x)$

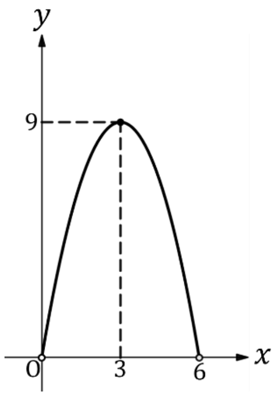
$=-\{(x-3)^2-9\}$

$=-(x-3)^2+9$

また

$x=0$のとき，$y=0$

$x=6$のとき，$y=0$



よって，**$x=3$のとき，Sは最大値$9\mathrm{m}^2$**をとる．

問 11

放物線$y=ax^2+bx+c$のbが偶数であるとき

$\dfrac{D}{4}$を用いているが，Dのまま計算してもよい．

$$\frac{D}{4}=\left(\frac{1}{2}b\right)^2-a\cdot c$$

（１）$x^2-2x+3=0$の判別式をDとすると

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot 3$

$=1-3$

$=-2<0$

よって，グラフと**x軸の共有点はない．**

（２）$-2x^2+4x+1=0$の判別式をDとすると

$\dfrac{D}{4}=2^2-(-2)\cdot 1$

$=4+2$

$=6>0$

よって，グラフは**x軸と２点で交わる．**

共有点のx座標は，$-2x^2+4x+1=0$を解いて

$2x^2-4x-1=0$

$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\cdot(-1)}}{2}$

$=\dfrac{2\pm\sqrt{6}}{2}$

よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{2\pm\sqrt{6}}{2}}$

（３）$4x^2-4x+1=0$の判別式をDとすると

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-4\cdot 1$

$=4-4=0$

よって，グラフは**x軸と接する．**

接点のx座標は，$4x^2-4x+1=0$を解いて

$(2x-1)^2=0$

$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}}$

問 12

（１）$x^2+6x+k=0$の判別式をDとすると

$\dfrac{D}{4}=3^2-1\cdot k$

$=9-k$

放物線のグラフがx軸と２点で交わるのは，

$D>0$のときであるから

$9-k>0$

$-k>-9$

$\boldsymbol{k<9}$

（２）$5x^2-2kx+3=0$の判別式をDとすると

$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-5\cdot 3$

$=k^2-15$

放物線のグラフがx軸に接するのは，

$D=0$のときだから

$k^2-15=0$

$k^2=15$

$\boldsymbol{k=\pm\sqrt{15}}$

（３）$2x^2+x+k=0$の判別式をDとすると

$D=1^2-4\cdot 2\cdot k$

$=1-8k$

放物線のグラフがx軸と共有点をもたないのは，

$D<0$のときだから

$1-8k<0$

$-8k<-1$

$\boldsymbol{k > \frac{1}{8}}$

問 13

（１）$x^2 - x - 12 = 0$の判別式をDとすると

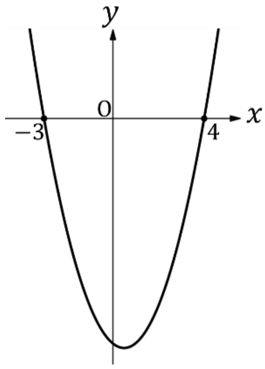
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)$

$\quad = 1 + 48 = 49 > 0$

$x^2 - x - 12 = 0$を解くと

$(x + 3)(x - 4) = 0$

$x = -3,\ 4$



$y = x^2 - x - 12$のグラフより，

$x^2 - x - 12 \geqq 0$の解は

$\boldsymbol{x \leqq -3,\ x \geqq 4}$

（２）$x^2 - 3x - 1 = 0$の判別式をDとすると

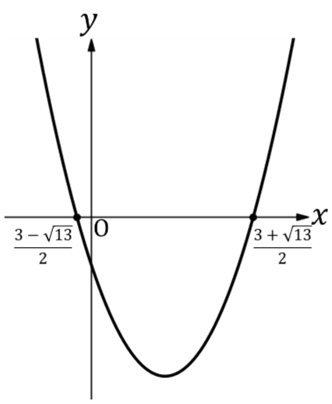
$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)$

$\quad = 9 + 4 = 13 > 0$

$x^2 - 3x - 1 = 0$を解くと

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$



$y = x^2 - 3x - 1$のグラフより

$x^2 - 3x - 1 \leqq 0$の解は

$$\boldsymbol{\frac{3 - \sqrt{13}}{2} \leqq x \leqq \frac{3 + \sqrt{13}}{2}}$$

（３）$x^2 - 10x + 25 = 0$の判別式をDとすると

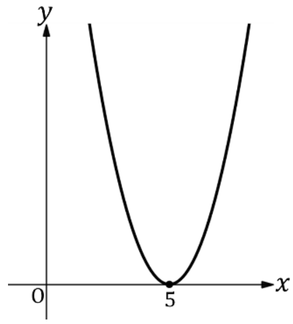
$\frac{D}{4} = (-5)^2 - 1 \cdot 25$

$\quad = 25 - 25 = 0$

$x^2 - 10x + 25 = 0$を解くと

$(x - 5)^2 = 0$

$x = 5$（２重解）



$y = x^2 - 10x + 25$のグラフより

$x^2 - 10x + 25 > 0$の解は

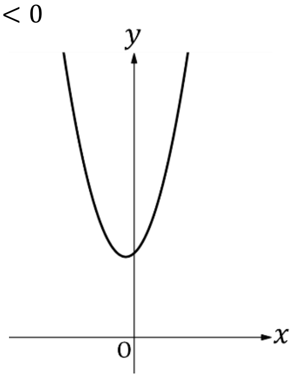
5以外のすべての実数（$\boldsymbol{x \neq 5}$）

（４）$3x^2 + x + 2 = 0$の判別式をDとすると

$D = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2$

$\quad = 1 - 24$

$\quad = -23 < 0$



よって，$y = 3x^2 + x + 2$のグラフは，

x軸と共有点をもたず，常に$y > 0$である．

したがって，$3x^2 + x + 2 > 0$を満たすxは

すべての実数である．